(Aus dem Botanischen Institut der Universität Freiburg i. Br.)

# Eine exakte Methode als Ersatz für die Varianzanalyse in bestimmten Fällen

Von **PETER IHM**

1. Kaum eine andere statistische Methode hat mehr Verbreitung gefunden als die Varianzanalyse, was sofort verständlich ist, wenn man an deren große Bedeutung für die Züchtungsforschung denkt. Große Mittel sind zu ihrer mathematischen Ausarbeitung zur Verfügung gestellt worden, und die Zahl der über sie erschienenen Publikationen ist unübersehbar groß. Dem kritischen Beobachter wird es aber nicht verborgen bleiben, daß in ihrer Anwendung durch den Laien viele Fehler gemacht worden sind, die einmal die Forschung in falsche Bahnen gelenkt haben oder den Untersucher, wollte er nicht an seinem Verstande zweifeln, zu einer schlechten Meinung über die Statistik veranlaßten. Leider blieb dem mathematischen Statistiker lange verborgen, welche Schlüsse unerlaubt auf Grund einer Varianzanalyse gezogen wurden, und derjenige, der die Methode in der Praxis anwendete, war oftmals nicht genug mathematisch geschult, um die Unzulässigkeit seiner Methode zu erkennen.

In der vorliegenden Arbeit soll eine Varianzanalyse behandelt werden, bei der $N$ Individuen in $p$-Klassen zu je $n$ eingeteilt sind, wobei die Individuen der einzelnen Klassen bestimmten Behandlungsarten ausgesetzt worden waren. Die Frage lautet einmal: (a) sind die Erwartungswerte der arithmetischen Mittel in den $p$-Klassen gleich oder nicht und (b) wo liegen die Differenzen zwischen den einzelnen Erwartungswerten. Es ist bekannt, daß die erste Frage durch einen sogenannten „Homogenitätstest" geprüft wird, die zweite durch Angabe einer sogenannten „Differenzentabelle", in der jedes arithmetische Mittel mittels STUDENTS $t$-Test mit jedem anderen verglichen wird. Ein derartiges Vorgehen ist z. B. ausführlich bei POST (7) beschrieben. Letztere Methode liefert aber eine zu große Irrtumswahrscheinlichkeit. Es wird gezeigt werden, wie sie auf Grund der Varianzanalyse durch eine Approximation zu verbessern ist. Eine exakte Methode, die existiert, wird ebenfalls beschrieben und zur Anwendung empfohlen, da sie einfacher und logisch gerechtfertigt ist.

2. Wie bereits erwähnt, liegen uns $N$-Individuen vor, die in $p$-Klassen zu je $n$ zerfallen. An jedem wurde je ein Merkmal gemessen, dessen Größe $x_{ij}$ sei beim $j$-ten Merkmal in der $i$-ten Klasse. Wir nehmen an, daß die $x_{ij}$ normalverteilt sind mit der gleichen Varianz $\sigma^2$ und den Erwartungswerten

$$\mathsf{E}\, x_{ij} = m_i\,,$$

unabhängig von $j$. Zweck der statistischen Erhebung ist, zu Aussagen über die $m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ zu gelangen. Die arithmetischen Mittel

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

sind unverfälschte Schätzwerte für $m_i$,

$$s^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

ist unverfälschter Schätzwert für $\sigma^2$. Wir können einmal fragen, ob die $m_i$ spezielle Werte $\hat{m}_i$ haben oder nicht, zum anderen, welche Größe die $m_i$ überhaupt haben. Die erste Frage führt zum Testen einer statistischen Hypothese, die andere zu einer Schätzung mit Hilfe des Konfidenzschlusses.

Wir wollen den Komplex der Erwartungswerte $m_i$ mit $\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_p)$ bezeichnen, den Komplex der $\hat{m}_i$ mit $\hat{\mathfrak{m}}$; ebenso stehe für den Komplex der $\bar{x}_i$ $\bar{\mathfrak{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$. Wir schreiben auch

$$\mathsf{E}\, \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{m}$$

in Analogie zu $\mathsf{E}\, \bar{x}_i = m_i$. Zur Beantwortung der ersten Frage formulieren wir zwei Hypothesen: $H_0$, die besagt, daß $\mathsf{E}\, \bar{\mathfrak{x}} = \hat{\mathfrak{m}}$, und $H_1$, daß $\mathsf{E}\, \bar{\mathfrak{x}} \neq \hat{\mathfrak{m}}$; letztere Ungleichung besagt, daß mindestens für ein $i$ $\mathsf{E}\, \bar{x}_i \neq \hat{m}_i$. Nach der NEYMAN-PEARSONschen Theorie der Signifikanztests verwerfen wir $H_0$ und akzeptieren $H_1$, wenn

$$v = \sum_{i=1}^{p} \frac{n\,(\bar{x}_i - \hat{m}_i)^2}{p\, s^2} \geqq F_{p,\,N-p} \qquad 2.1$$

ist. $F_{p,N-p}$ ist FISHERS Varianzverhältnis für $(p, N-p)$ Freiheitsgrade, das zu einem „$P$-Wert" von $\alpha$ gehört. $\alpha$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir $H_0$ verwerfen, obwohl $H_0$ zutrifft („Fehler erster Art"). Geometrisch bedeutet (2.1), daß wir $H_0$ verwerfen, wenn $\bar{\mathfrak{x}}$, das als Punkt im $p$-dimensionalen Raum aufgefaßt werden kann, auf der Oberfläche oder außerhalb der Hyperkugel mit Mittelpunkt $\hat{\mathfrak{m}}$ und Radius

$$R = s \sqrt{\frac{p\, F_{p,\,N-p}}{n}} \qquad 2.2$$

liegt. Ist

$$v < F_{p,\,N-p}\,, \qquad 2.3$$

so müssen wir außer $\hat{\mathfrak{m}}$ noch weitere Punkte in einer Umgebung von $\hat{\mathfrak{m}}$ akzeptieren. Da ohne Kenntnis von $\sigma^2$ diese Umgebung nicht angegeben werden kann, ist das hier geschilderte Verfahren, obwohl allgemein angewendet, unbefriedigend[1]. Wir werden uns daher nach einer besseren Methode umsehen und finden sie in der Durchführung eines Konfidenzschlusses.

3. Sind $\bar{\mathfrak{x}}$ und $s^2$ gefunden, so erhalten wir einen Konfidenzbereich für $\mathsf{E}\, \bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{m}$ folgendermaßen: Wir bezeichnen den Bereich im Innern der durch (2.1) gegebenen Kugel (bei Gültigkeit des Gleichheitszeichens!) als „Annahmebereich für $\hat{\mathfrak{m}}$". Wir lassen $\hat{\mathfrak{m}}$ alle Werte von $\mathfrak{m}$ durchlaufen und erhalten dann eine Menge von Annahmebereichen, die alle das Innere von zueinander kongruenten Hyperkugeln im $p$-dimensionalen Raum darstellen. Zu jedem Annahmebereich gehört ein und nur ein $\mathfrak{m}$. Der Konfidenzbereich stellt den Bereich dar, in dem die $\mathfrak{m}$ liegen, in deren Annahmebereich $\bar{\mathfrak{x}}$ liegt, d. h. die $\mathfrak{m}$, für die (2.3) gilt. Der Konfidenzbereich wird hier durch das Innere der Hyperkugel im $p$-dimensionalen

[1] Weitere Ausführungen, dargestellt an HOTELLINGS T, finden sich bei IHM (2).

$\mathfrak{m}$-Raum mit Mittelpunkt $\bar{\mathfrak{x}}$ und Radius $R$ nach (2.2) gegeben.

Führen wir einen Konfidenzschluß auf $\mathfrak{m}$ durch, so geben wir nach Feststellung von $\bar{\mathfrak{x}}$ und $s^2$ den Konfidenzbereich $B_{\bar{\mathfrak{x}}, s^2}$ an und behaupten, daß

$$\mathfrak{m} \in B_{\bar{\mathfrak{x}}, s^2}$$

($\in$ gelesen als „enthalten in"), eine Behauptung, die wir „Konfidenzbehauptung" nennen wollen. Die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums ist dabei $\alpha$. Zu der in Abschnitt 2 angegebenen Methode besteht folgende Beziehung: sie erlaubt eine Entscheidung darüber, ob

$$\mathfrak{m} = \hat{\mathfrak{m}} \in B_{\bar{\mathfrak{x}}, s^2}\,,$$

was nicht der Fall ist, wenn wir $H_0$ verwerfen und $H_1$ akzeptieren.

4. Bei der Varianzanalyse wird im Sinne eines Homogenitätstests meist eine andere Frage gestellt: ist $m_1 = m_2 = \cdots = m_p = m$, $m$ aber unspezifiziert, oder treffen die Gleichungen nicht zu. Wir wollen die beiden Hypothesen mit $H_0'$ und $H_1'$ bezeichnen. Ist

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \bar{x}_i\,,$$

so verwerfen wir nach der NEYMAN-PEARSONschen Theorie $H_0'$ und akzeptieren $H_1'$, wenn

$$v' = \sum_{i=1}^{p} \frac{n\,(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{(p-1)\,s^2} \geq F_{p-1,\,N-p} \qquad 4.1$$

ist, eine Ungleichung, die aus der Varianzanalyse wohlbekannt ist. Um auch hier eine geometrische Veranschaulichung zu erhalten, müssen wir einen kleinen Umweg einschlagen. Es seien durch Drehung des Koordinatensystems neue Koordinaten

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}\,(\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_p)$$
$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$
$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + 2\,\bar{x}_3)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

eingeführt. Unter $H_0'$ ist

$$E\,z_i = \begin{cases} m\sqrt{p} & \text{für } i = 1 \\ 0 & \text{für } i = 2, 3, \ldots, p\,. \end{cases}$$

Wir beschränken uns auf $z_2, \ldots, z_p$. Die Punkte $\mathfrak{z}$, deren Koordinaten sie sind, liegen in der Hyperebene

$$\sum_{i=1}^{p} \bar{x}_i = 0\,,$$

die ihrerseits ein ($p$-1)-dimensionaler Raum, der $\mathfrak{z}$-Raum, ist. Aus (4.1) wird, wie leicht zu zeigen ist,

$$v' = \sum_{i=2}^{p} \frac{n\,z_i^2}{(p-1)\,s^2}\,.$$

Ist

$$v' < F_{p-1,\,N-p}\,, \qquad 4.2$$

so treten wieder die in Abschnitt 2 genannten Schwierigkeiten auf: wir können nicht $H_0'$ akzeptieren, sondern müssen noch Punkte in einer Umgebung des Nullpunktes zulassen. Aber ohne Kenntnis von $\sigma^2$ können wir diese Umgebung nicht angeben.

5. Auch im Falle von Abschnitt 4 läßt sich ein Konfidenzbereich angeben. Es sei

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{p}}\,(m_1 + \cdots + m_p)$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-m_1 + m_2)$$
$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-m_1 - m_2 + 2\,m_3)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Die $u_2, \ldots, u_p$ sind Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{u}$, der in einer Hyperebene, gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = 0 \qquad 5.1$$

liegt, die ein ($p$-1)-dimensionaler Raum, der $\mathfrak{u}$-Raum, ist. Der Konfidenzbereich $B'_{\mathfrak{z}, s^2}$ enthält alle Punkte $\mathfrak{u}$ im Innern der ($p$-1)-dimensionalen Hyperkugel mit Mittelpunkt $\mathfrak{z}$ und Radius

$$R' = s\sqrt{\frac{(p-1)\,F_{p-1,\,N-p}}{n}}\,.$$

Der Abstand der Punkte 0 und $\mathfrak{u}$ ist der senkrechte Abstand, den $\mathbf{E}\,\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{m}$ im $\mathfrak{m}$-Raum von der durch $m_1 = m_2 = \cdots = m_p$ definierten Geraden hat. Hier, wie in Abschnitt 3, beantwortet (4.1) oder (4.2) die Frage, ob $\mathfrak{u} = 0$ außerhalb (4.1) oder innerhalb (4.2) von $B'_{\mathfrak{z}, s^2}$ liegt. Der Leser, der den Umgang mit der Geometrie in $p$-dimensionalen Räumen nicht gewohnt ist, braucht nur $p = 3$ zu setzen, um sofort alles zu verstehen.

6. Die Angabe eines Konfidenzbereiches für $\mathfrak{u}$ ist ungebräuchlich. Im Rahmen der Varianzanalyse interessieren wir uns, wie bereits in Abschnitt 1 angedeutet, für die Differenzen

$$\delta_{ij} = m_i - m_j\,, \quad i, j = 1, 2 \ldots, p\,.$$

Da $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$, können wir $j > i$ setzen. Wegen $\delta_{ij} = 0$ für $i = j$ haben wir somit $p\,(p-1)/2$ Größen $\delta_{ij}$. Wir können nun wieder testen, ob $\delta_{ij} = \hat{\delta}_{ij}$ oder $\delta_{ij} \neq \hat{\delta}_{ij}$ ist, kommen aber wegen Unkenntnis von $\sigma^2$ wieder in Schwierigkeiten. Somit wollen wir einen Konfidenzschluß auf die $\delta_{ij}$ durchführen, um zu Konfidenzaussagen der Form

$$„\,\delta_{ij} \in I_{d_{ij}, s^2}\," \qquad 6.1$$

zu gelangen. $I_{d_{ij}, s^2}$ ist ein Intervall, das von dem Schätzwert

$$d_{ij} = \bar{x}_i - \bar{x}_j$$

von $\delta_{ij}$ und $s^2$ abhängt. Wir formulieren also $p\,(p-1)/2$ Konfidenzaussagen, die wir irgendwie verbinden. Sofort erkennen wir, daß diese Verbindung durch „und" (symbolisch: &) geschieht. Die Aussagenverbindung ist also eine „und"-Verbindung, eine „Konjunktion", für deren Richtigkeit Voraussetzung ist, daß alle Aussagen (6.1) richtig sind[1]. Das Ereignis, daß die Konjunktion falsch ist, wird mit der Wahrscheinlichkeit $\alpha$ zugelassen, der Irrtumswahrscheinlichkeit.

---

[1] Die Operationen mit Aussagen sind ausführlich dargestellt bei HILBERT und ACKERMANN (1).

Nach den üblichen Methoden (POST (7)) ist $I_{d_{ij}, s^2}$ durch

$$d_{ij} - \frac{t_{N-p}\, s \sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \delta_{ij} < d_{ij} + \frac{t_{N-p}\, s \sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

definiert. $t_{N-p}$ ist das zu $\alpha$ gehörige STUDENTsche $t$ für $N-p$ Freiheitsgrade. Wären die $\delta_{ij}$ unabhängig, so wäre die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums $1-(1-\alpha)^{p(p-1)/2} > \alpha$ für $p > 2$. Da die $\delta_{ij}$ für $p > 2$ aber linear abhängig sind, hat sie einen anderen Wert, ist aber jedenfalls $> \alpha$.

Wie es im $\mathfrak{m}$-Raum $m_i$-Achsen gibt, gibt es auch $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{ij}$-Achsen. Diese sind Geraden, deren Punkte die Projektionen aller Punkte sind, für die $(m_i - m_j) = \delta_{ij}$ ist. Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ bewirkt Maßstabsgleichheit. Es läßt sich zeigen, daß die $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{ij}$-Achsen alle in der Hyperebene liegen, die durch die Gleichung (5.1) gegeben ist. Die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums ist $\alpha$ für die Konfidenzaussage

$$„\mathfrak{u} \in B'_{\mathfrak{z}, s^2}“ \,. \qquad 6.2$$

Aus (6.2) folgt, daß

$$„\delta_{12} \in I_{12}“ \;\&\cdots\&\; „\delta_{p-1,p} \in I_{p-1,p}“\,, \qquad 6.3$$

wobei $I_{ij}$ durch

$$d_{ij} - s\sqrt{\frac{(p-1)\,F_{p-1,\,N-p}}{n/2}} < \delta_{ij} < d_{ij} + s\sqrt{\frac{(p-1)\,F_{p-1,\,N-p}}{n/2}}$$

gegeben ist. Wenn aus (6.2) (6.3) folgt, so folgt umgekehrt aus (6.3) nicht (6.2): $B'_{\mathfrak{z}, s^2}$ wird durch den durch (6.3) definierten Bereich, das Innere eines Polyeders im $(p-1)$-dimensionalen Raum, eingeschlossen. Für $p = 3$ erhalten wir anstelle des Polyeders ein auf der Spitze stehendes reguläres Sechseck. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Aussagenkonjunktion (6.3) falsch ist, $< \alpha$.

Den Weg, die Projektionen auf einzelne Achsen zu betrachten, ist SCHEFFÉ gegangen (8), obwohl nach seiner Methode keine Beschränkung auf die Hyperebene (5.1) durchgeführt worden wäre. Es ist klar, daß es sich hierbei um eine Approximation handelt, jedenfalls ist die Konfidenzaussage übersichert. Immerhin bedeutet diese Methode, daß $t_{N-p}$ durch $\sqrt{(p-1)\,F_{p-1,N-p}}$ ersetzt werden muß. Durch welche Größe aber ist letzteres zu ersetzen, wenn wir anstelle von $I_{ij}$ in (6.3) Intervalle $I_{d_{ij}, s^2}$ angeben wollen, die so beschaffen sind, daß die Irrtumswahrscheinlichkeit bei Behaupten der Richtigkeit von

$$„\delta_{12} \in I_{d_{12}, s^2}“ \;\&\cdots\&\; „\delta_{p-1,p} \in I_{d_{p-1,p}, s^2}“ \qquad (6.4)$$

genau $\alpha$ wird? Dies wird in den Abschnitten 7 und 8 beantwortet werden.

7. Wir haben in Abschnitt 4 einen Test für $H'_0$ erhalten und eine Größe $v'$ angegeben (4.1). Diese hat unter $H'_0$ FISHERS $F$-Verteilung, unter $H'_1$ aber eine nicht-zentrale $F$-Verteilung, die von dem Parameter

$$\mu = \sum_{i=2}^{p} \frac{u_i^2}{\sigma^2} \qquad (7.1)$$

abhängt, also von einer Zahl. Wir könnten aber ebenso einen Test konstruieren, der jetzt von Größen $\delta_{ij}/\sigma^2$ abhängt. Die Hypothese $H''_0$ lautete dann dahin, daß alle $\delta_{ij} = \hat{\delta}_{ij}$, die Gegenhypothese $H''_1$ dagegen, daß wenigstens eine Gleichung nicht zutrifft. Würden wir den Test in Abschnitt 4 verwenden, so wäre speziellen $\delta_{ij} \neq \hat{\delta}_{ij}$ ein $\mu$ nach (7.1) eindeutig zugeordnet, aber nicht umgekehrt. Wir erhalten folgendes Verfahren: ist nicht für alle $p(p-1)/2$ gefundenen $d_{ij} = \bar{x}_i - \bar{x}_j$ und $s^2$

$$\hat{\delta}_{ij} - \frac{s}{\sqrt{n}} q_{p,N-p} < d_{ij} < \hat{\delta}_{ij} + \frac{s}{\sqrt{n}} q_{p,N-p}\,, \qquad (7.2)$$

so verwerfen wir $H''_0$ und akzeptieren $H''_1$. Wir haben noch $q_{p,N-p}$ anzugeben. Seine Größe muß so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß unter $H''_0$ Gleichung (7.2) gleichzeitig für alle $i$ und $j > i$ zutrifft, $1-\alpha$ ist. Es läßt sich zeigen, daß dies gleichbedeutend ist mit der Wahrscheinlichkeit, daß

$$q = \frac{(\bar{x}_b - \bar{x}_a)\sqrt{n}}{s} < q_{p,N-p}$$

für

$$P(q < q_{p,N-p}) = 1-\alpha\,, \qquad (7.3)$$

wenn $\bar{x}_a$ das kleinste, $\bar{x}_b$ das größte der $\bar{x}_i$ ist. $q$ ist also die studentisierte Variationsbreite.

Die Verteilung von $q$ ist zuerst von PILLAI (6) explizit angegeben worden. Eine genaue Tabelle von $q_{p,N-p}$ für $\alpha = 0{,}05$ und $\alpha = 0{,}01$ findet sich bei MAY (4).

8. Wir interessieren uns für simultane Konfidenzbereiche für die $\delta_{ij}$. Sie lassen sich mittels des in Abschnitt 7 angegebenen Annahmebereiches leicht erhalten. Für die Intervalle $I_{d_{ij}, s^2}$ in (6.4) gilt nämlich

$$d_{ij} - \frac{s}{\sqrt{n}} q_{p,N-p} < \delta_{ij} < d_{ij} + \frac{s}{\sqrt{n}} q_{p,N-p}\,. \qquad (8.1)$$

Somit ist aber das Problem gelöst. Wir sehen, daß wir $t_{N-p}\sqrt{2}$ durch $q_{p,N-p}$ zu ersetzen haben. Stets ist $t_{N-p}\sqrt{2} < q_{p,N-p}$, wie sich aus den Tafeln ersehen läßt, die Differenzentabelle liefert also bei der Verwendung ersterer Größe stets eine Irrtumswahrscheinlichkeit $> \alpha$, die bei größerem $p$ erheblich wird.

Wie zuvor, läßt sich rasch entscheiden, ob die Konfidenzaussage für Werte $\delta_{ij} = \hat{\delta}_{ij}$ gilt, indem wir die Ungleichungen (7.2) verwenden und $\delta_{ij} = \hat{\delta}_{ij}$ unter $H''_0$ testen. Sind speziell unter $H''_0$ alle $\hat{\delta}_{ij} = 0$, so ordnen wir die $\bar{x}_i$ der Größe nach, ziehen vom größten das kleinste ab und prüfen, ob

$$q = \frac{(\bar{x}_b - \bar{x}_a)\sqrt{n}}{s} < q_{p,N-p} \qquad (8.2)$$

ist oder nicht. In ersterem Falle gibt es selbstverständlich keine weitere Differenz, für die etwa $q \geq q_{p,N-p}$ wäre, d. h. wir müssen für alle Differenzen $\delta_{ij} = 0$ zulassen.

Die studentisierte Variationsbreite wurde zuerst von NEWMAN (5) für die Varianzanalyse vorgeschlagen. Später hat TUKEY (9,10) sie für simultane Konfidenzintervalle angegeben, und auch KEULS (3) sie für die Praxis vorgeschlagen. In der vorliegenden Arbeit wurde das Problem vom Standpunkt der Konfidenzaussagen und deren Verbindung behandelt. Es ist angenommen worden, daß eine Konjunktion von $p(p-1)/2$ Aussagen über Erwartungswerte $\delta_{ij}$ aufgestellt wurde. Es sind Fälle denkbar, in denen es für einige $\delta_{ij}$ gleichgültig ist, in welchem Intervall sie liegen, und wir uns für keine Aussage über sie interessieren. Dann ist auch die angegebene Methode noch verbesserungsfähig, doch ist es zweifelhaft, ob dann noch eine einfach anzugebende Form für die $I_{d_{ij},s^2}$ existiert. Jedenfalls ist dann die Irrtumswahrscheinlichkeit $< \alpha$, wenn wir einige der Aussagen als irrelevant auslassen.

Beispiel: Als einfaches Beispiel wollen wir ein Experiment verwenden, bei dem 15 Kressewurzeln zu je 5 drei verschiedenen Behandlungsweisen unterworfen wurden. Die Längen der Wurzeln sind in mm in Tabelle 1 dargestellt. Wir erhalten $\bar{x}_1 = 24.2$, $\bar{x}_2 = 15.2$, $\bar{x}_3 = 14.6$ und $s^2 = 1.90$ für 12 Freiheitsgrade. Wir finden nach (8.2)

*Tabelle* 1.

| 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|
| 23 | 15 | 16 |
| 24 | 14 | 13 |
| 26 | 15 | 14 |
| 23 | 18 | 15 |
| 25 | 14 | 15 |

$$q = \frac{9.6\sqrt{5}}{1,38} = 15.6 .$$

Nach MAY (4) ist für $\alpha = 0.01$

$$q_{3,12} = 5.04 ,$$

daher können wir die Hypothese $H_0''$, daß $\delta_{ij} = 0$ für alle $i$ und $j > i$ verwerfen. Wir haben $d_{12} = 9.0$, $d_{13} = 9.6$, $d_{23} = 0.6$, außerdem

$$q_{3,12}\, s/\sqrt{5} = 3.1 .$$

Nach (8.1) erhalten wir die Aussagenverbindung von (6.4) in der Form

$$„5.9 < \delta_{12} < 12.2“ \;\&\; „6.5 < \delta_{13} < 12.5“ \;\&\; „-2.5 < \delta_{23} < 3.7“ .$$

Es ist interessant, nach PILLAIS (6) Formel zu berechnen, wie groß die Irrtumswahrscheinlichkeit gewesen wäre, wenn wir anstelle von $q_{3,12}$ für $\alpha = 0.01$ $t_{12}\sqrt{2} = 4{,}32$ verwendet hätten. Es findet sich $\alpha = 0.03$, woraus sofort ersichtlich ist, wie ungenau die alte Methode ist.

Herrn Professor F. OEHLKERS und der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Ermöglichung der Arbeit, ebenso Herrn Professor R. POHL für das Zahlenmaterial.

## Literatur

1. HILBERT, D. u. W. ACKERMANN: Grundzüge der theoretischen Logik. Springer, Berlin 1949. — 2. IHM, P.: Anwendung von HOTELLINGS verallgemeinertem $T$-Test zur Prüfung der Differenz zweier Mittelwertepaare. Z. Vererbungslehre **96**, 143—156 (1954). — 3. KEULS, M.: The use of the „Studentised range“ in connection with an analysis of variance. Euphytica **1**, 112—122 (1952). — 4. MAY, J. M.: Extended and corrected tables of the upper percentage points of the ‚Studentised‘ range. Biometrika **39**, 192—194 (1952). — 5. NEWMAN, D.: The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation. Biometrika **31**, 20—30 (1939). — 6. PILLAI, K. C. S.: On the distribution of ‚Studentised‘ range. Biometrika **39**, 194—195 (1952). — 7. POST, J. J.: Anleitung zur Planung und Auswertung von Feldversuchen mit Hilfe der Varianzanalyse. Springer, Berlin, 1952. — 8. SCHEFFÉ, H.: A method for judging all contrasts in the analysis of variance. Biometrika **40**, 87—104 (1953). — 9. TUKEY, J. W.: Comparing individual means in the analysis of variance. Biometrics **5**, 99—114 (1949). — 10. TUKEY, J. W.: Quick and dirty methods in statistics. II. Simple analyses for standard designs. Proc. Fifth Annual Convention, Amer. Soc. for Quality Control, 189—197 (1951).

# BUCHBESPRECHUNGEN

**I. BOLSUNOV, Züchterische Methoden für die Schaffung nikotinarmer und nikotinreicher Tabake.** Fachliche Mitteilungen der Österreichischen Tabakregie. 2. Heft November 1954.

Die verschiedenen Wege zur Erzeugung von nikotinarmem Tabak werden besprochen und die Erreichung dieses Zieles durch züchterische Maßnahmen als der aussichtsreichste bezeichnet. Nach einem kurzen Überblick über das bisher auf diesem Gebiet Erreichte beschreibt der Autor die verschiedenen züchterischen Methoden, wobei er sich zum Teil auf eigene Versuche stützt.

Der sicherste Weg führt über die Kreuzungszucht innerhalb der Art *Nicotiana tabacum*, wobei Kreuzungen von nikotinarmen Sorten mit solchen Sorten, deren Nikotingehalt sich in einem labilen Zustand befindet, oder mit Gigasformen am aussichtsreichsten sind. Daneben werden noch erwähnt: Individualauslesen aus Landsorten, künstliche Erzeugung von Mutationen und Artkreuzungen.

Die züchterische Arbeit auf diesem Gebiet wird durch die Tatsache erschwert, daß uns eine genauere genetische Analyse der Vererbung des Nikotingehaltes fehlt und daß die Methoden zur Bestimmung des Nikotin- und Nornikotingehaltes noch nicht hinreichend leistungsfähig sind.

Für die Züchtung nikotinreicher Tabake kommen ausschließlich die Sorten der Art *Nicotiana rustica* in Frage. Der Verfasser hat das Weltsortiment, das durch die Expedition von N. VAVILOV und seinen Mitarbeitern sowie durch das Marchorka-Institut in Kiew gesammelt wurde, untersucht. Dabei stellte er fest, daß sich unter den sekundären Zentren des Vorkommens dieser Art, die sich im Laufe der jahrhundertelangen Kultur entwickelt haben, einige befinden, die durch einen hohen Anteil nikotinreicher Formen auffallen.

Die Züchtung nikotinreicher Formen wird durch eine ziemlich feste Korrelation zwischen hohem Nikotingehalt und niedrigem Blattertrag sehr erschwert.

Zur Erreichung der gesteckten Ziele empfiehlt der Verfasser eine Zusammenarbeit auf internationaler Basis.

*W. Endemann (Dresden)*

**Festschrift für ERWIN AICHINGER zum 60. Geburtstag.** Herausgegeben im Auftrage und mit Unterstützung des Landes Kärnten von Univ.-Prof. Dr. ERWIN JANCHEN. Sonderfolge der Schriftenreihe: „Angewandte Pflanzensoziologie“ in 2 Bänden. Wien: Springer-Verlag 1954. XXXII + 1311, 161 Abb. u. 8 Karten im Text steif. geh. DM 90,—.

Zum 60. Geburtstag des bekannten österreichischen Pflanzensoziologen ERWIN AICHINGER liegt die unter der Schriftleitung von Prof. Dr. JANCHEN unter Mitarbeit von Dipl.-Ing. GAYL und Dozent Dr. WENDELBERGER herausgebrachte Sonderausgabe der Schriftenreihe „Angewandte Pflanzensoziologie“ in zwei stattlichen Bänden vor.

Im Rahmen einer Besprechung ist es unmöglich, auf die Beiträge von nahezu 90 Autoren aus der ganzen Welt einzugehen. Sie zeigen, wie bekannt und geschätzt AICHINGER in der Fachwelt ist.

Wie WENDELBERGER in einer Würdigung des Jubilars eingangs hinweist, begründete AICHINGER seinen wissenschaftlichen Ruf durch die Veröffentlichung der „Vegetationskunde der Karawanken“ (1933), einer pflanzensoziologischen Monographie, die zu den „klassischen“ dieses Fachgebiets gerechnet werden kann.

Nach dem Krieg arbeitete AICHINGER seine Lehre von den Vegetationsentwicklungstypen aus, die die Dynamik der Pflanzengemeinschaften, namentlich der von menschlichen Eingriffen stark beeinflußten, in den Mittelpunkt der Betrachtung stellt, da nach den Prinzipien der Charakterlehre von BRAUN-BLANQUET diese „Ersatzgesellschaften“ in einer für die Praxis der Bodenkultur hinreichenden Weise nicht immer erfaßt werden können.

Diese Betrachtungsweise, die für die landwirtschaftliche und forstliche Vegetationskunde große Bedeutung ge-